

# Formális nyelvnek és automaták

## 9. előadás

Vasziľ György

Számszám-tudományi  
Tanár

110-es szoba

<http://www.inf.unideb.hu/web/vasziľ/oktatás>

[vasziľ.györgy@inf.unideb.hu](mailto:vasziľ.györgy@inf.unideb.hu)

# A múltkor

- Pumpálási lemma környezetfüggetlen nyelvekre
- Turing gépek, sztringek elfogadása Turing géppel, elfogadott nyelv
- Függvények kiszámítása Turing géppel

Pumpalema  
könnyűsethíggelle  
jellet

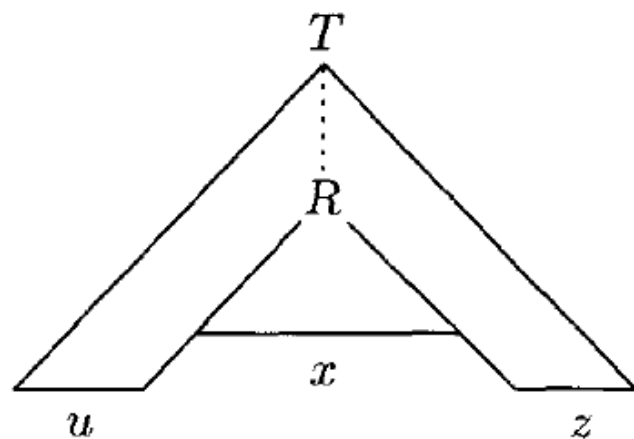
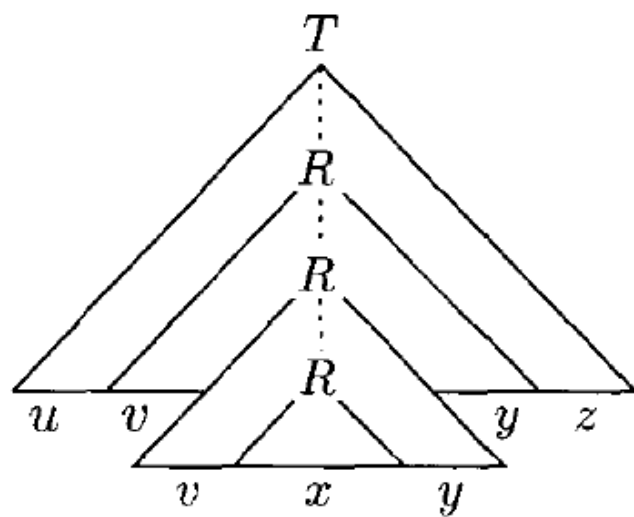
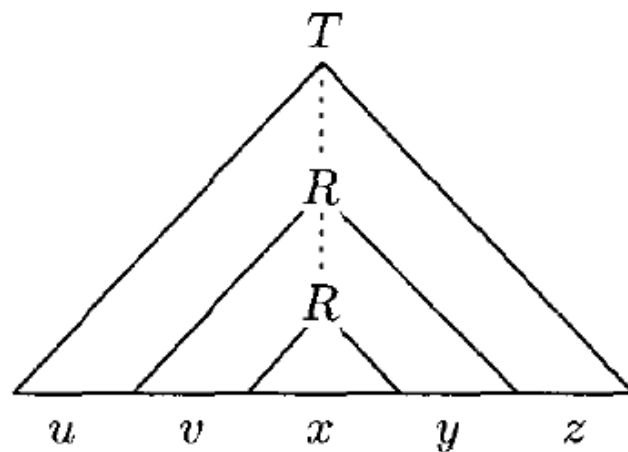
Pumpalema lemma: Ha  $L$  könnyűsethíggelle  
akkor létezik  $p$ , hogy ha  $s \in L$  és  $|s| > p$ ,  
akkor  $s$  felírható  $s = uvxyz$  alakban,  
ahol

1.  $|vxy| \leq p$

2.  $|vy| > 0$

3.  $uv^i xy^i z \in L$  minden  $i \geq 0$ -ra

# Pirongita's ötlek



## Reidmund

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  wenn Vöngset-  
fingsetten. Wissen:

Ha  $L$  Vöngsetfingsetten uoh  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  
uoh under  $s \in L$ ,  $|s| > p$  u ~~te~~ pumpil-  
hete uoh. Veggjör  $s = a^p b^p c^p - t$ .

Nu leht pumpil-, leht  $L$  uoh  
leht Vöngsetfingsetten.

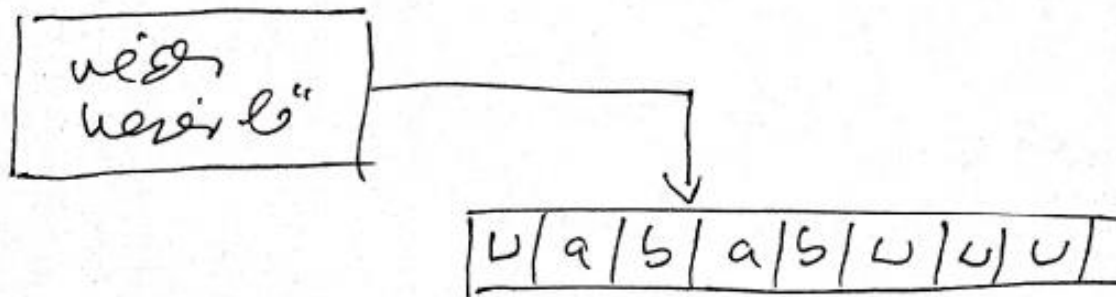
# A könyvekben

- J. Martin: 6.1 fejezet, 205 – 211. oldal
- Dömösi et al.: 7.4 fejezet, 151 – 156. oldal  
(Bar-Hillel lemma)

# A múltkor

- Pumpálási lemma környezetfüggetlen nyelvekre
- Turing gépek, sztringek elfogadása Turing géppel, elfogadott nyelv
- Függvények kiszámítása Turing géppel

# Turing gép



1. A gép írást is olvashat is a halmozék
2. Az írási-olvasó fej jobbra is balra is mozgatható
3. A halmozék megírása
4. Két speciális állapot: elfogadási és elutasítási

## Definíció

$$T = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta), \text{ ahol}$$

$Q$  : végtelen halmaz

$\Sigma$  : bemeneti ábécé

$\Gamma$  : kimeneti ábécé,  $\Sigma \subseteq \Gamma$

$q_0 \in Q$  : kezdő állapot

$$\delta : Q \times (\Gamma \cup \{\Delta\}) \rightarrow (Q \cup \{q_{acc}, q_{rej.}\}) \times (\Gamma \cup \{\Delta\})$$

↑  
vagy  
nincs-jel

↑  
 $\times \{R, L, S\}$   
speciális  
elfogadó  
elutasító } állapotok

## Elfogadás

T Turing gép elfogadja  $w \in \Sigma^*$  néit,  
ha van olyan  $C_1, C_2, C_3 \dots C_k$  konfiguráció-  
sorozat, hogy

1.  $C_1 = q_0 \Delta w$

2.  $C_i \Rightarrow C_{i+1} \quad i \leq i \leq k-1$

3.  $C_k$  elfogadó konfiguráció,

azaz:  $C_k = u q_{acc} v$  ahol  $u, v \in \Sigma^*$

$L(T)$  az elfogadott nyelvek halmaza.

Ha a Turing gép nem fogad  
el senkit ...

1. q<sub>rej</sub> - elutasító állapotban áll  
meg
2. Egyállaleni nem áll meg  
(Hogyan lehet ez?)

Nézzük meg az  $a$  és  $b$  valahol a szalagon példát.

## Példáml :

$L = \{ w \# w \mid w \in \{0,1\}^* \}$  felismerő Turing géppel.

┐  
└─┘  
□ 0 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 □ ...

┐  
└─┘  
□ x 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 □ ...

┐  
└─┘  
□ x 1 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 □ ...

┐  
└─┘  
□ x 1 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 □ ...

┐  
└─┘  
□ x x 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 □ ...

┐  
└─┘  
□ x x x x x x # x x x x x x x □ ...

accept

(L nem környezetfüggetlen!)

Als "einfache" Turing-Maschine  
rechner

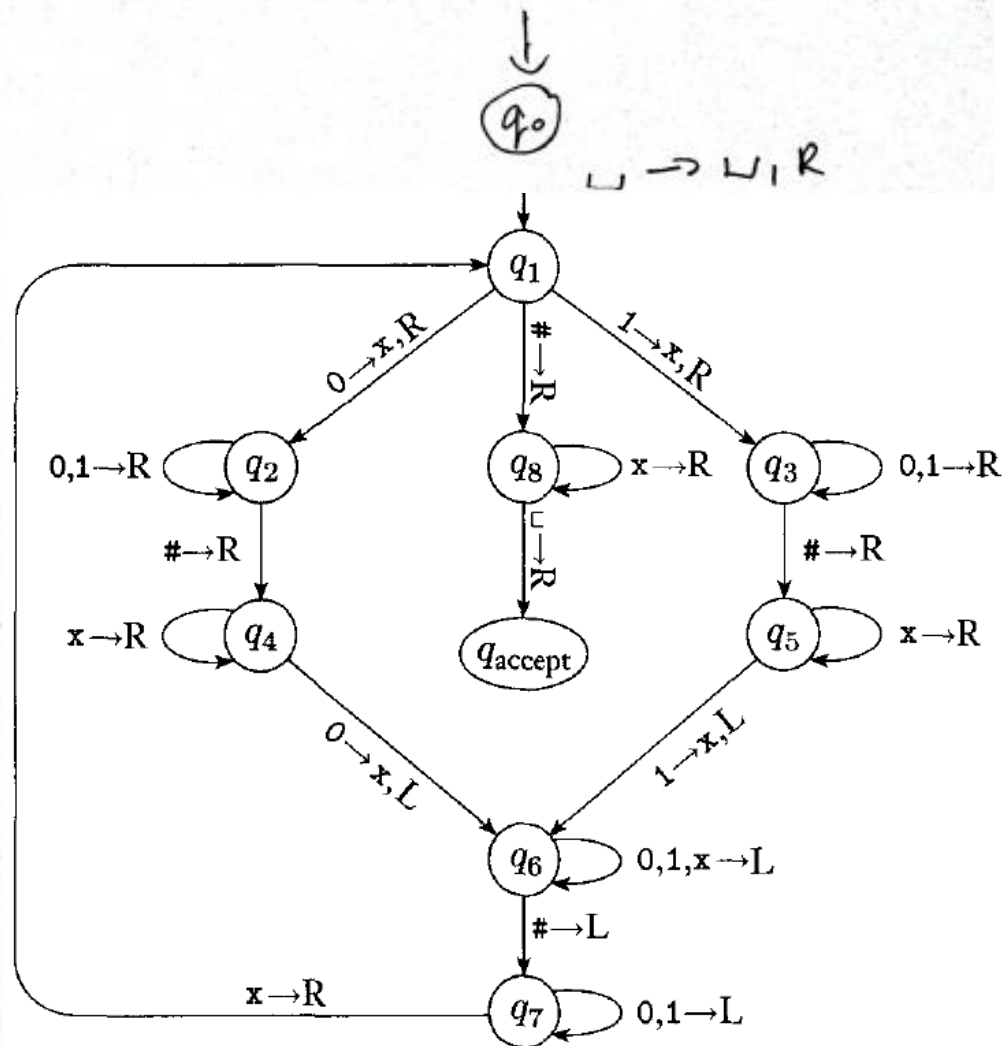
$$T = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta)$$

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_7\}$$

$$\Sigma = \{0, 1, \#\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \#, x\}$$

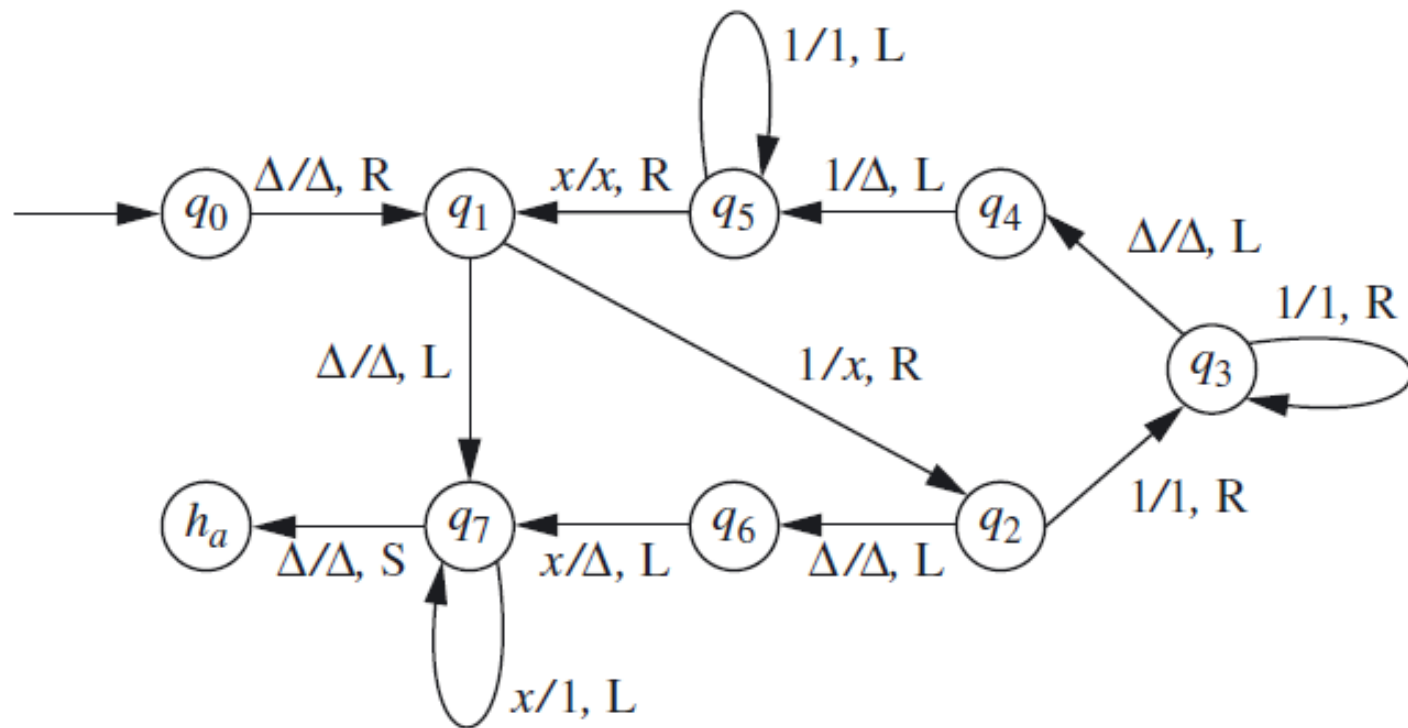
$$\delta = \longrightarrow$$



# A múltkor

- Pumpálási lemma környezetfüggetlen nyelvekre
- Turing gépek, sztringek elfogadása Turing géppel, elfogadott nyelv
- Függvények kiszámítása Turing géppel

Kélda :  $f(u) = u \text{ } \Delta \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 2$



$q_0 \Delta 1 1 1 1 \Delta \mid \dots \mid h_a \Delta 1 1 \Delta$

$q_0 \Delta 1 1 1 1 1 \Delta \mid \dots \mid h_a \Delta 1 1 \Delta$

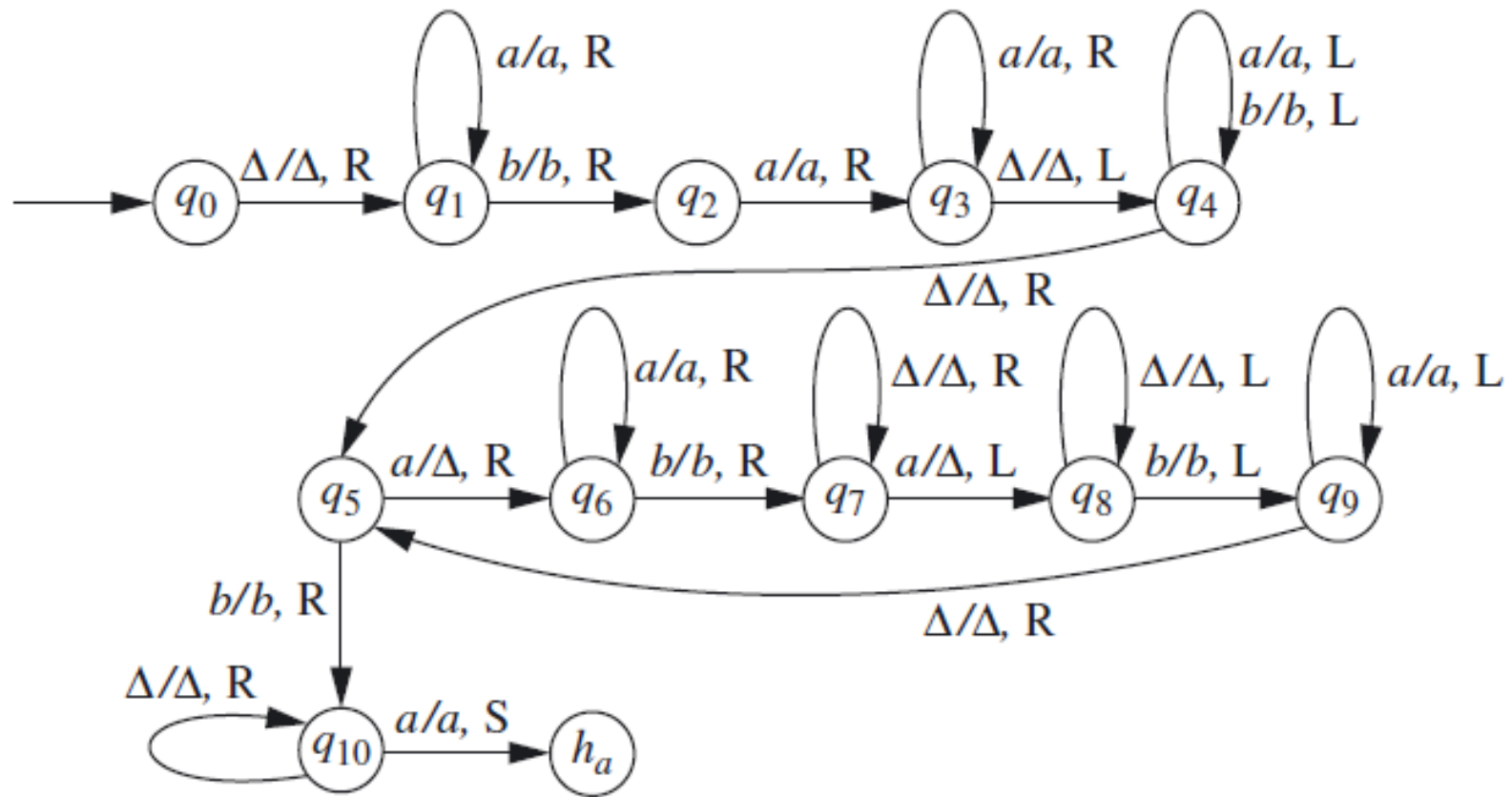
# A könyvekben

- J. Martin: 7.1 – 7.3 fejezet, 224 – 238. oldal
- Dömösi et al.: 9.1 fejezet, 206 – 214. oldal

# Ma

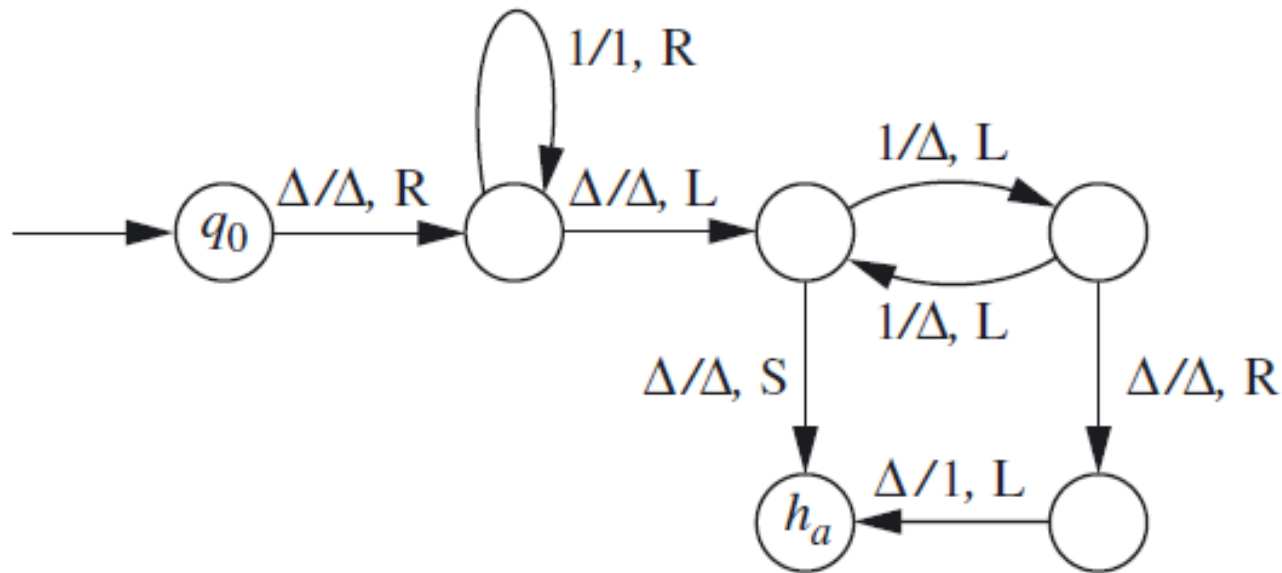
- Több szalagos Turing gépek
- Nemdeterminisztikus Turing gépek
- Az univerzális Turing gép

Beispiel:  $L = \{a^i b a^j \mid 0 \leq i < j\}$   
elfgendes a



Ki löst man a abaa ist a aba leuchtet?

Mein pñlda.:  $f(u) = u \bmod 2$



$q_0 \Delta 1111 \Delta \mid \dots \mid h_a \Delta$

$q_0 \Delta 11111 \Delta \mid \dots \mid h_a \Delta 1 \Delta$

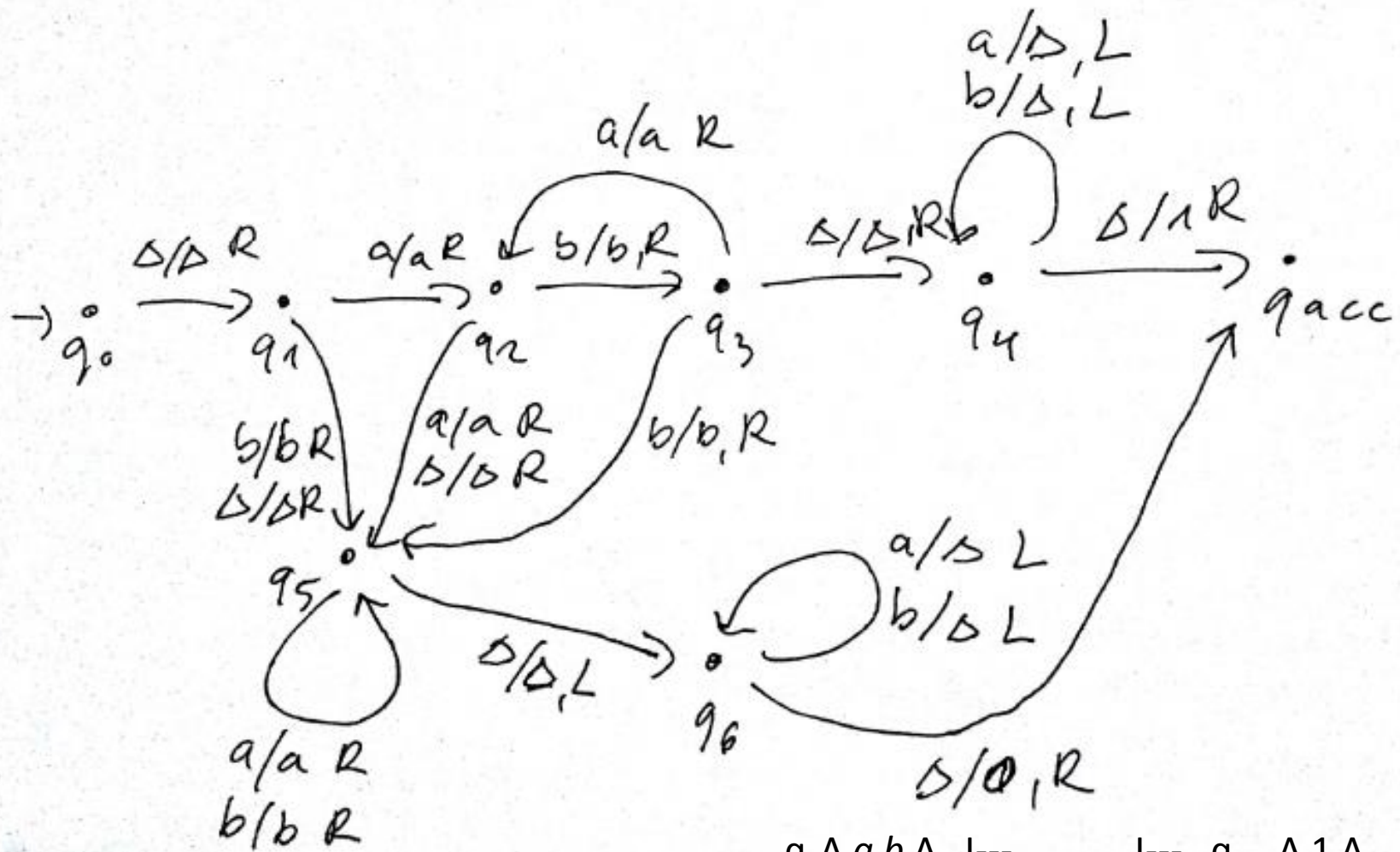
## Kennzeichen für Folgen

Seien  $L \subseteq \Sigma^*$ , a Kennzeichen

für Folge  $\chi_L: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ , also

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in L \\ 0 & \text{wenn } x \notin L \end{cases}$$

Regular:  $L = ab(ab)^*$



$q_0 \Delta ab \Delta \mid \dots \mid q_{acc} \Delta 1 \Delta$

$q_0 \Delta aa \Delta \mid \dots \mid q_{acc} \Delta 0 \Delta$

## Példáml :

$L = \{ w \# w \mid w \in \{0,1\}^* \}$  felismerő Turing géppel.

┐  
└─┘  
┐ 0 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 ┐ ...

┐ x ┐  
└─┘  
┐ x 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 ┐ ...

┐ x 1 1 0 0 0 # x ┐  
└─┘  
┐ x 1 1 0 0 0 ┐ ...

┐ x ┐  
└─┘  
┐ x 1 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 ┐ ...

┐ x x ┐  
└─┘  
┐ x x 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 ┐ ...

┐ x x x x x x # x x x x x x ┐  
└─┘  
┐ x x x x x x x x ┐ ...

accept

(L nem környezetfüggetlen!)

# Az előző Turing gép módosítása

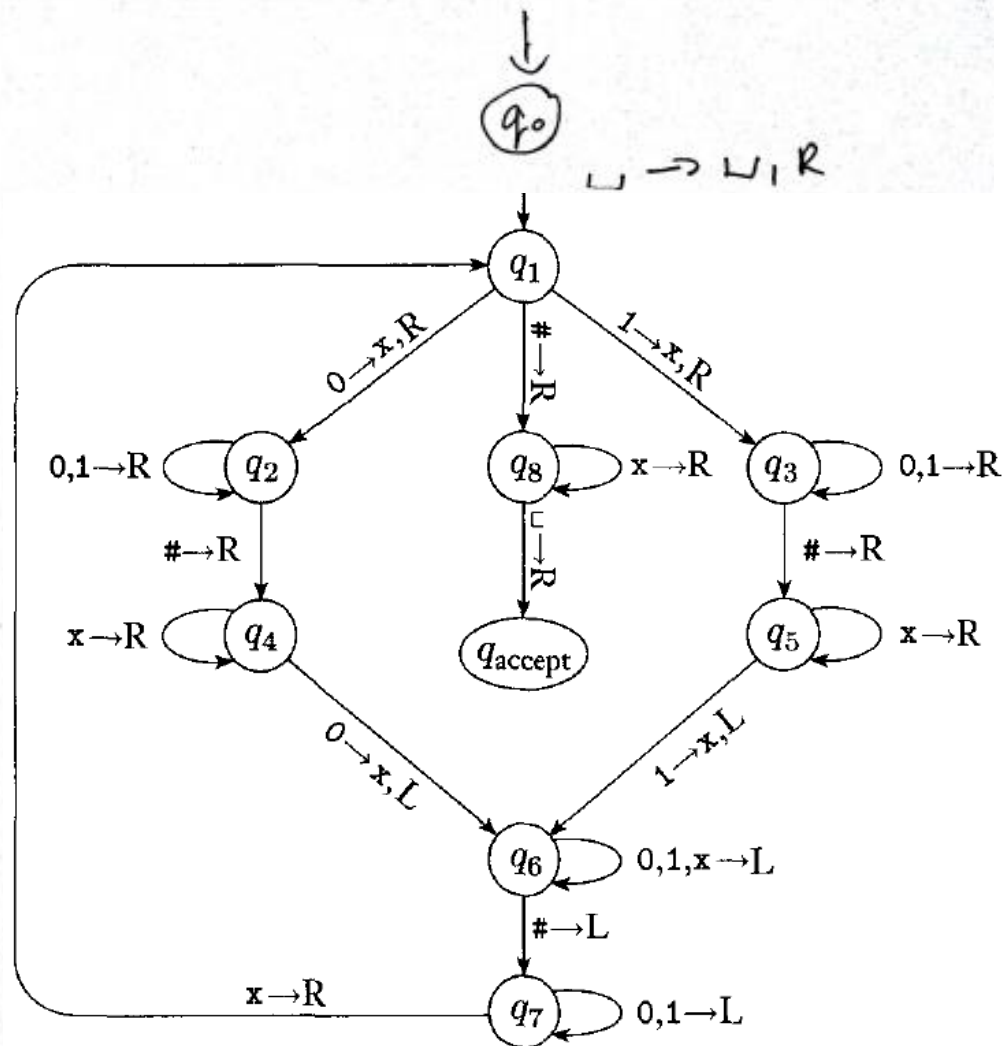
$$T = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta)$$

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_7\}$$

$$\Sigma = \{0, 1, \#\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \#, x\}$$

$$\delta = \longrightarrow$$



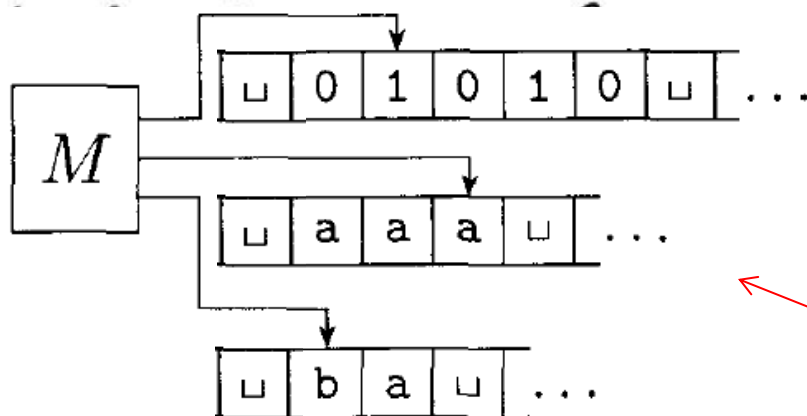
# Ma

- Több szalagos Turing gépek
- Nemdeterminisztikus Turing gépek
- Az univerzális Turing gép

# Variáció Turing gépe

- Egy névleg lelet  $k$  névleg, an input an elő névlegan van.

$$\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$



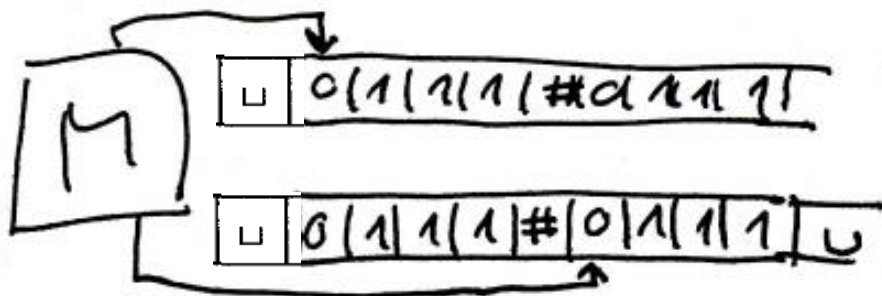
*Ezen a példán  $k=3$*

$$L = \{ w \# w \mid w \in \{0,1\}^* \} \text{ kinnir}$$

2 gættar

Rajzoljuk le!

1.  $w \# w$  an elvö náloga
2. kinnirlyst á  $w \# w$ -t a kinnirlyst náloga
3. an elvö þejet álltsur a náloga elvö, a kinnirlyst a  $\#$  þeje
4. kinnirlyst þejet leprædjünd jebba á kinnirlyst ássá an elvö þejet



5. elfogadur,  
 $w \#$ -t á  
 $w$ -t reynur  
 eja a  
 gættar 3

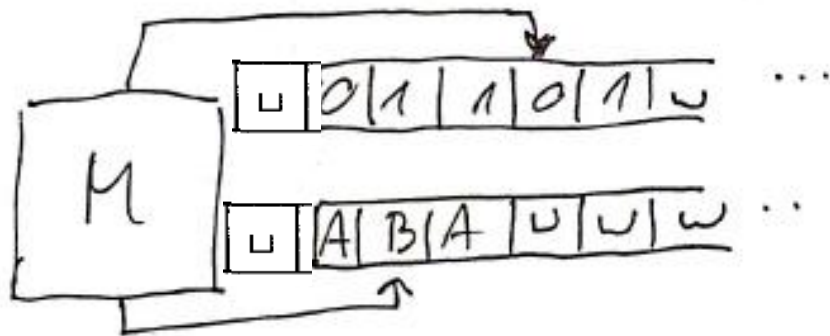
$k$  nálağz i 1 nálağz Turing gépér

Tétel : Minder  $k$  nálağz  $T_1$  Turing gépér  
létezik és 1 nálağz  $T_2$  Turing gépér

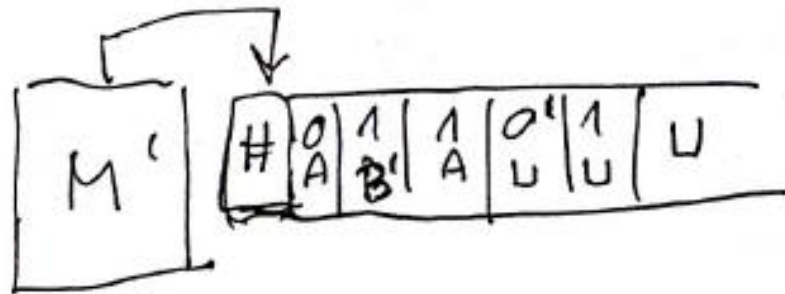
úgy  $L(T_1) = L(T_2)$  is megállapítható, ~~és~~  
ha elfogadják a lemezt, akkor  $T_1$  és  $T_2$   
nálağzaira (elő nálağzaira) ugyanaz  
van írva.

2 values  $\rightarrow$  1 value

Alappondalat



$\Gamma = \{0, 1, A, B, \dots\}$



$\Gamma' = \{ \boxed{0}, \boxed{0'}, \boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{0'} \dots$

## Bilangitai /1 ( $\xi = 2$ )

hegyen  $T_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_{acc}, q_{rej})$  2 nalygy,

keuhtmaluq  $T_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_2, q_{acc}, q_{rej})$

nyralag Tyig gyipet.

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \underbrace{(\Gamma \times \Gamma)}_{\substack{\uparrow \\ \text{(er mit} \\ \text{jelent)}}} \cup (\Gamma' \times \Gamma) \cup (\Gamma \times \Gamma') \cup (\Gamma' \times \Gamma')$$

$\cup \{ \# \}$

$\Gamma_2$  elemei  $\Gamma_1, \#$ ,  $\Gamma$ -beli betűpárok (nemise)

## Biçayirî /2

Ha  $\delta_1(p, a_1, a_2) = (q, b_1, b_2, D_1, D_2)$ , wêha  $\delta_2$ -t îşene kusema'îye:

1. A fey # -a ya nabeş elîşîn beşş
2. A fey wazaggî jêlêr, anîq talat ên ~~we~~ wemêrêtt beşît "felîl". Jêşşne weş ~~ê~~ wenzî vîşna ~~beş~~ a # -a.
3. A fey wazaggî jêlêr, anîq talat ên wemêrêtt beşît "alul".
4. Ha şut  $a_1$ -et, lût  $q_2$ -t talat, aşşer  $(\underset{\uparrow}{d}, a'_2)$ -t cewêşî  $(d, b_2)$ -e, eî wemê'me weş a  $D_2$  nemişî nemişîdot.

### Brillegi-61/3

$$\sigma_1(p, a_1, a_2) = (q, b_1, b_2, D_1, D_2)$$

⊛. Mergana a fejet  $D_2$  neit:

- ha  $\#$ -t lat, eluterit ( $a$  „eredeti”) is  
lemerne a valaszt
- ha  $(d, b)$ -t, akkor keresz  $(d, b')$ -re.
- ha  $a \in \Gamma_1$ -et lat, akkor keresz  
 $(a')$ -re.

5. Kerse meg az  $a_2(d', c)$ -t is keresz  $(b_1, c)$ -re  
is megyen  $D_1$  irányba, azan ⊛

6. Tíjén is, ha  $a \#$ -re.

# Re'ldai ml

#	$\Delta$	$0'$	$\Delta$	$0$	$1$	$\Delta$
	$0$	$1$	$0$	$1'$		

#	$\Delta$	$0'$	$\Delta$	$0$	$1$	$\Delta$
	$0$	$1$	$0$	$0$	$\Delta'$	

...

#	$\Delta'$	$\Delta$	$\Delta$	$0$	$1$	$\Delta$
	$0$	$1$	$0$	$0$	$\Delta'$	

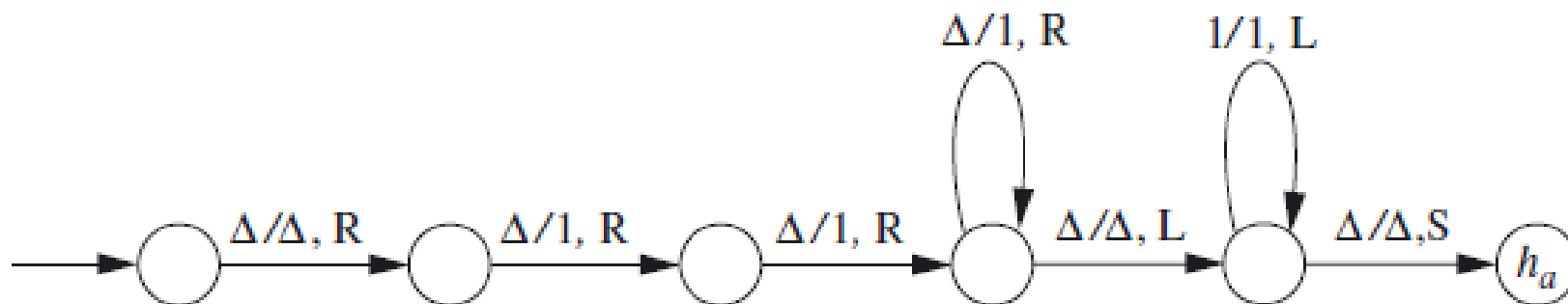
$$\delta(p, 0, 1) = (q, \Delta, 0, L, R)$$

# Ma

- Több szalagos Turing gépek
- Nemdeterminisztikus Turing gépek
- Az univerzális Turing gép

# Nemdetrminisztikus Turing gép

Például: (Mit művel?)



## Variation Turing game

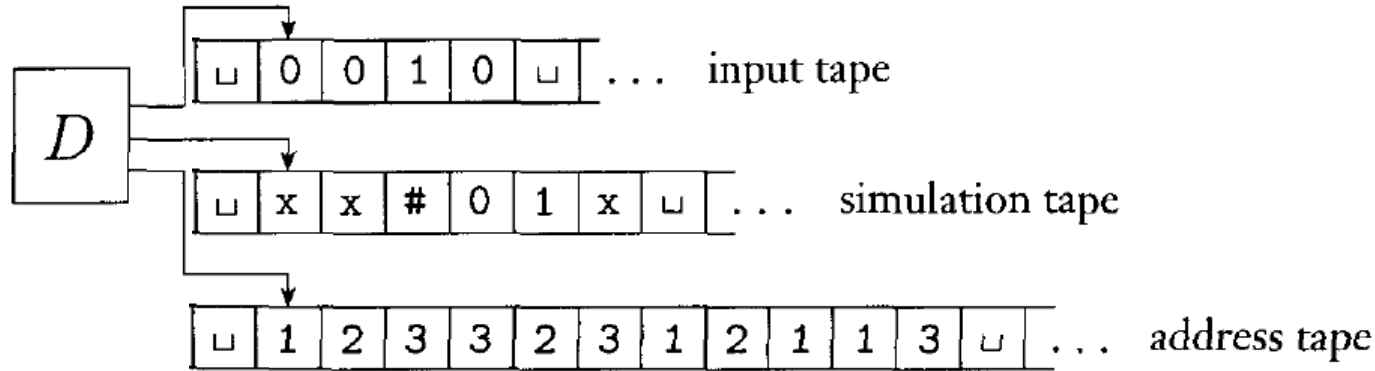
- Nimm deterministische Turing gép

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}}$$

Akkor deterministische Turing gép nem-  
lelhető de deterministische Turing gép.

3 válasz.

Neundet. Turing gép  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  det. Turing gép



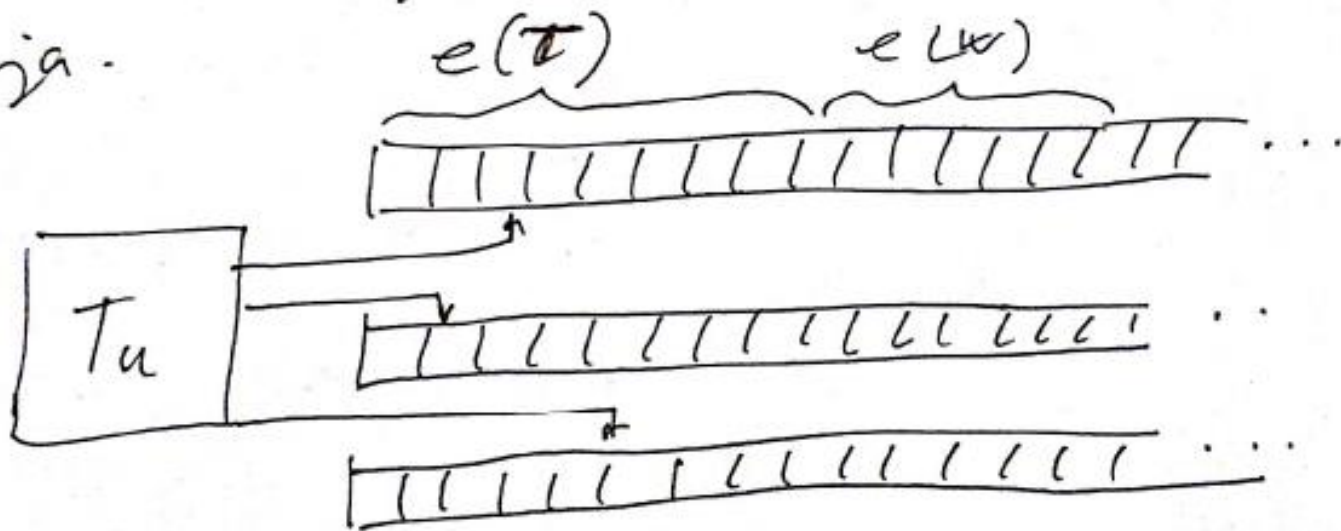
1. Az input az első négyesre van
2. Megvizsgáljuk a cíkjelét a 2. négyesre
3. Szimuláljuk a 2. négyes a némi társi  
 Jelenet azt az útját, amit a 3. négyesnél  
 leolvasunk. Ha a némi társi nem van, akkor  
 kiegészítjük a címetekkel utat a 3.  
 négyesre, és vissza a 2. lépésre.

# Ma

- Több szalagos Turing gépek
- Nemdeterminisztikus Turing gépek
- Az univerzális Turing gép

## Üniversiteler Turing testi

Bu soru  $T_u$  Turing testi, analiz tekniği  
kullanılarak Turing testi ünlüleri  
indirir.



Bu soru  $T$  ünlüleri ( $e(t)$ ) ve ünlüleri ( $e(w)$ )  
kullanılarak  $T_u$  ünlüleri  $T$  ünlüleri  $u-u$ .

# How we let it go

## Gidala's

$$s(\Delta) = 0$$

$$s(a_i) = 0^{i+1} \quad (\text{for each } a_i \in S)$$

$$s(h_a) = 0$$

$$s(h_r) = 00$$

$$s(q_i) = 0^{i+2} \quad (\text{for each } q_i \in Q)$$

$$s(S) = 0$$

$$s(L) = 00$$

$$s(R) = 000$$

Each move  $m$  of a TM, described by the formula

$$\delta(p, a) = (q, b, D)$$

is encoded by the string

$$e(m) = s(p)1s(a)1s(q)1s(b)1s(D)1$$

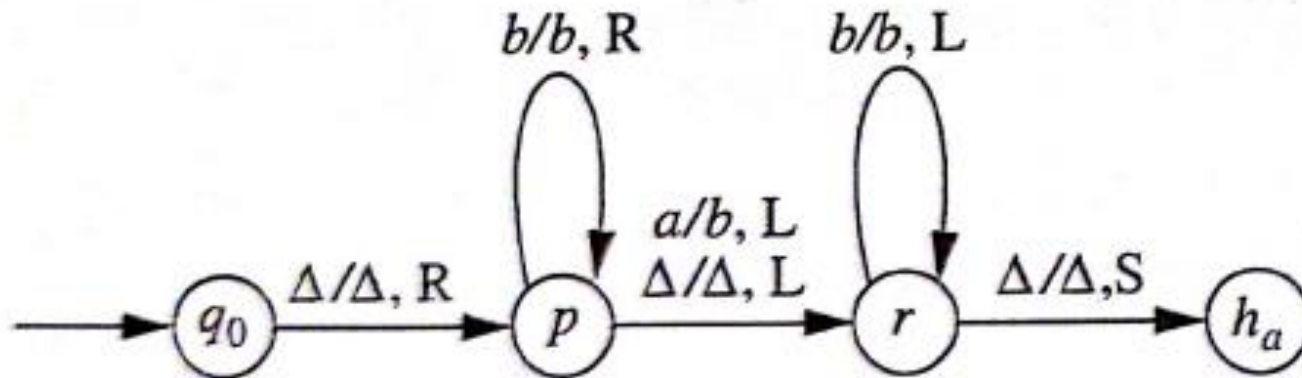
and for any TM  $T$ , with initial state  $q$ ,  $T$  is encoded by the string

$$e(T) = s(q)1e(m_1)1e(m_2)1 \cdots e(m_k)1$$

where  $m_1, m_2, \dots, m_k$  are the distinct moves of  $T$ , arranged in some arbitrary order. Finally, any string  $z = z_1 z_2 \cdots z_k$ , where each  $z_i \in S$ , is encoded by

$$e(z) = 1s(z_1)1s(z_2)1 \cdots s(z_k)1$$

Re' dail



0001 000101000010100011 00001000100001000100011 0000100100000100010011  
 0000101000001010011 000001000100000100010011 000001010101011

$$s(\Delta) = 0$$

$$s(a_i) = 0^{i+1} \quad (\text{for each } a_i \in \mathcal{S})$$

$$s(h_a) = 0$$

$$s(h_r) = 00$$

$$s(q_i) = 0^{i+2} \quad (\text{for each } q_i \in \mathcal{Q})$$

$$s(S) = 0$$

$$s(L) = 00$$

$$s(R) = 000$$

Each move  $m$  of a TM, described by the formula

$$\delta(p, a) = (q, b, D)$$

is encoded by the string

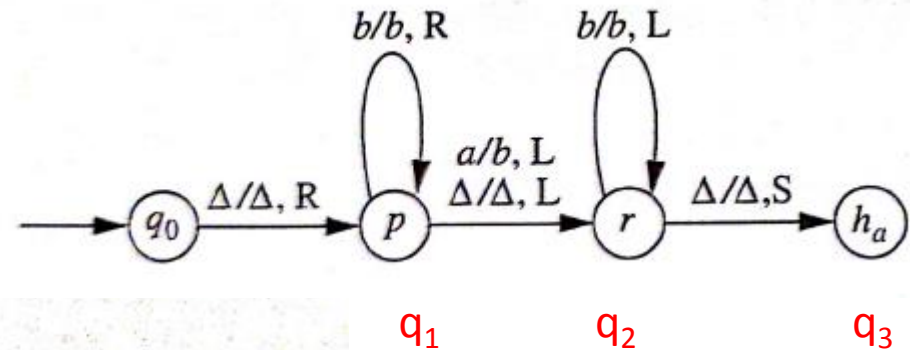
$$e(m) = s(p)1s(a)1s(q)1s(b)1s(D)1$$

and for any TM  $T$ , with initial state  $q$ ,  $T$  is encoded by the string

$$e(T) = s(q)1e(m_1)1e(m_2)1 \cdots e(m_k)1$$

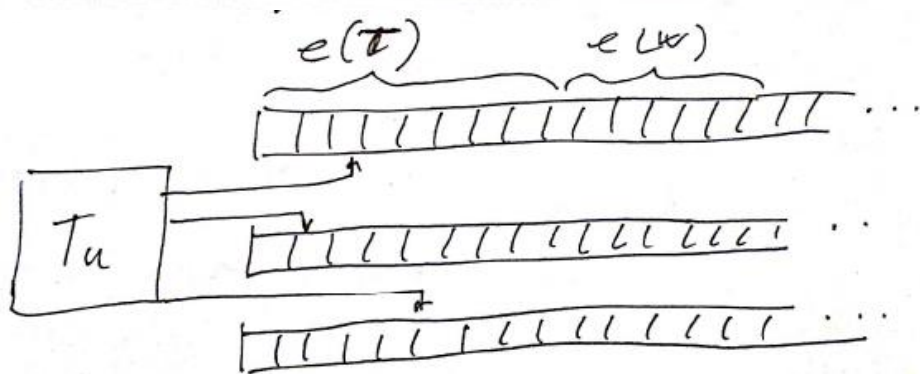
where  $m_1, m_2, \dots, m_k$  are the distinct moves of  $T$ , arranged in some arbitrary order. Finally, any string  $z = z_1 z_2 \cdots z_k$ , where each  $z_i \in \mathcal{S}$ , is encoded by

$$e(z) = 1s(z_1)1s(z_2)1 \cdots s(z_k)1$$



0001 000101000010100011 00001000100001000100011 0000100100000100010011  
 0000101000001010011 000001000100000100010011 000001010101011

Tu mit Größe



1. Tä ähtuvalgi e(x)-t a 2. nalgona, T ürdäällä-  
jotat pedig a 3. nalgone
2. A 2. nalgail Tuleoluona ar alkuaili lehti't,  
a 3. nalgail ar arkuaili älläpät.
3. Kuer alajsiä wogroni a 1. nalgon ar  
ehke lartre' ~~wogron~~ älläpät ähtuemetet
4. Gheöl li alenne a üj älläpätat ei art,  
kopp mit kell a 2. nalgon wi coile.

# A Turing gép mint "női légió modell" - számítási modell

1. A Turing gép általános célú számítási modell
2. Rendszeres programozható
3. Működési szabályok megadása

⇒ Alkalmazható kiterjedően a "számítás"  
más néven az "algoritmus" fogalmának  
formális leírására

# Church - Turing teis

Alonso Church loojikun, matemaatikun

Alan Turing matemaatikun, XX. sajand  
eläa jelle, töörepe

"A Turing gép mindent tud", araa, ha van  
egn probleéma "mechanikus eljárás" -  
vagyis már leírásban megadható (algorithmus), akkor  
egn Turing gép is meg tudja oldani.

Ha egy probléma már Turing géppel nem lehet  
megoldani, akkor az "mechanikus eljárás"  
nem algorithmus sem.